Занятие 1.1 Введение. Развитие понятия числа

Числа 1, 2, 3, 4, …… - множество натуральных чисел (N)
Числа $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$, ……. - множество целых чисел (Z)

Числа $0; \pm 2; \pm \frac{1}{2}; \pm 0,78; \pm 1,24; \pm \frac{1}{8}; ...$ - множество рациональных чисел (Q)

Любое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{7}{21} = \frac{10}{30}$ $\quad -\frac{2}{5} = \frac{-2}{5} = \frac{-10}{25} = \frac{-14}{35} = \frac{-20}{50}$ $\quad 3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{30}{10}$

$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{8} = \frac{0}{10}$ и т.д.

Разделив "m" на "n" получаем конечную или бесконечную десятичную дробь

$\frac{1}{4} = 0,25$ $\quad \frac{5}{9} = 0,5555\ldots$ $\quad -\frac{6}{5} = -1,2$ $\quad -\frac{3}{7} = -0,428571428571\ldots$
$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$ $\quad 4\frac{47}{90} = 4,5222$

Как видим, у некоторых дробей десятичные знаки повторяются
0,5555 ……; 0,3333 ……; 4,5222 …….;

Такие числа называются периодическими десятичными дробями и записываются:
4,959595 … = 4, (95) 2,125125125 … = 2, (125)
0,5121212 … = 0,5 (12) 2,13444 … = 2,13 (4)

Каждая бесконечная периодическая дробь представляет собой рациональное число (докажем несколько позже), а пока будем использовать правило записи в виде обыкновенной дроби:

$4,(95) = 4\frac{95}{99}$; $\quad 1,83(4) = 1\frac{834-83}{900} = 1\frac{751}{900}$; $\quad 0,(5) = \frac{5}{9}$;
$0,5(19) = \frac{519-5}{990} = \frac{514}{990} = \frac{257}{495}$ $\quad 3,(421) = 3\frac{421}{999}$

для чисто периодической дроби: в числителе пишется число, стоящее в периоде, а в знаменателе столько "9", сколько цифр в периоде, целая часть остается без изменения.

для смешанной периодической дроби: в числителе разность между числом, стоящим после запятой, и числом, стоящим после запятой до периода, а в знаменателе столько "9", сколько цифр в периоде, со столькими "0", сколько цифр после запятой до периода
Запишите в виде обыкновенной дроби:

5,21 (3) 13, (71) 14,72 (24) 0, (4)
0,7 (125) 10, (125)

Числа, представляющие собой бесконечные непериодические десятичные дроби, называются иррациональными:

4,1728 …. 0,1078612 … 13,200941 …

$\sqrt{3} = 1,7321....$ $\sqrt{2} = 1,41....$ $\pi = 3,14...$

$e \approx 2,718...$(число Непера)

Вы уже знакомы с числовыми множествами, называемыми **промежутками.** Перечислим их.

Отрезок с концами a и b:

[a;b] = $\{x \in R \mid a \le x \le b\}$

Интервал с концами a и b

(a,b) = $\{x \in R \mid a < x < b\}$

Полуоткрытые промежутки:

(a,b] = $\{x \in R \mid a < x \le b\}$; [a,b) = $\{x \in R \mid a \le x < b\}$

Число b - a называется *длиной* промежутка

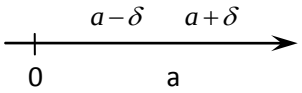
Бесконечные промежутки (лучи, полупрямые):

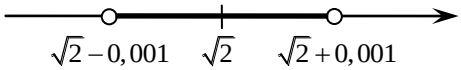
$(a;+\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$; $[a;+\infty) = \{x \in R \mid x \ge a\}$;

$(-\infty;a) = \{x \in R \mid x < a\}$; $(-\infty;a] = \{x \in R \mid x \le a\}$.

Числовая прямая: $(-\infty;+\infty) = \mathrm{R}$

Интервал вида $(a-\delta;a+\delta)$ называют также δ - окрестностью *точки a*





Можно сказать, например, что все десятичные приближения по недостатку и по избытку к числу $\sqrt{2}$, начиная с третьего (т.е. приближения $\sqrt{2}$ с точностью до 10^{-n} при n ≥ 3), попадают в δ-окрестность точки $\sqrt{2}$ при δ = 0,001.

При выполнении действий над действительными числами используют правила округления числа

4,762 ≈ 4,76 (с точностью до 0,01)
4,762 ≈ 4,8 (с точностью до 0,1)
4,762 ≈ 5 (с точностью до целых чисел)

Формулы сокращенного умножения

$(а + в)^2 = а^2 + 2 а в + в^2$	$(а - в)^2 = а^2 - 2 а в + в^2$
$(а^2 - в^2) = (а + в)(а - в)$	$(а^3 - в^3) = (а - в)(а^2 + а в + в^2)$
$(а^3 + в^3) = (а + в)(а^2 - а в + в^2)$	$(а + в)^3 = а^3 + 3 а^2 в + 3 а в^2 + в^3$
$(а - в)^3 = а^3 - 3 а^2 в + 3 а в^2 - в^3$	

Выполнить действия (самостоятельно)

1. $(4a + 3c)^2$
2. $(x^3 - 2y + 3xy)^2$
3. $(2x - 3y^2 - x^3y)^2$
4. $(x^2 - 3y) (x^2 + 3y)$
5. $(x + 2y) (x^2 - 2xy + 4y^2)$

Контрольные вопросы

1. Всякая ли обыкновенная дробь - число рациональное?
2. Может ли быть рациональное число отрицательным?
3. Почему бесконечную периодическую десятичную дробь считают рациональным числом?
4. Назовите числа рациональные, иррациональные

   2,75354276; 5, 3 (71); $\sqrt{7}$

   15,171 171 171 …; 4, 36 (5); $\sqrt{\frac{4}{9}}$; π

   0, 36 78 ..; 1,276 ..;

5. Какие числа, кроме рациональных и иррациональных являются действительными?
6. Можно ли утверждать, что квадратный корень из любого натурального числа есть число иррациональное?
7. Можно ли утверждать, что квадратный корень из любого нечетного числа есть число иррациональное?