# Тема: Основные понятия и теории дифференциальных уравнений 1-го порядка

## 1. Историческая справка.

Теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов современной математики. Чтобы охарактеризовать ее место в современной математической науке, прежде всего необходимо подчеркнуть основные особенности теории дифференциальных уравнений, состоящей из двух обширных областей математики: теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории уравнений с частными производными.

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVII веке одновременно с возникновением дифференциального и интегрального исчисления. Можно сказать, что необходимость решать дифференциальные уравнения для нужд механики, то есть находить траектории движений, в свою очередь, явилась толчком для создания Ньютоном нового исчисления. Органическая связь физического и математического ясно проявилась в методе флюксий Ньютона. Законы Ньютона представляют собой математическую модель механического движения. Через обыкновенные дифференциальные уравнения шли приложения нового исчисления к задачам геометрии и механики; при этом удалось решить задачи, которые в течение долгого времени не поддавались решению. В небесной механике оказалось возможным не только получить и объяснить уже известные факты, но и сделать новые открытия (например, открытие Леверье в 1846 году планеты Нептун на основе анализа дифференциальных уравнений).

Обыкновенные дифференциальные уравнения возникают тогда, когда неизвестная функция зависит лишь от одной независимой переменной. Соотношение между независимой переменной, неизвестной функцией и ее производными до некоторого порядка составляет дифференциальное уравнение. В настоящее время теория обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой богатую, широко разветвленную теорию. Одними из основных задач этой теории являются существование у дифференциальных уравнений таких решений, которые удовлетворяют дополнительным условиям (начальные данные Коши, когда требуется определить решение, принимающее заданные значения в некоторой точке и заданные значения производных до некоторого конечного порядка, краевые условия и другие), единственность решения, его устойчивость. Под устойчивостью решения понимают малые изменения решения при малых изменениях дополнительных данных задачи и функций, определяющих само уравнение. Важными для приложений являются исследование характера решения, или, как говорят, качественного поведения решения, нахождение методов численного решения уравнений. Теория должна дать в руки инженера и физика методы экономного и быстрого вычисления решения.

Основы этой науки были заложены трудами Д'Аламбера (1717 - 1783), Эйлера (1707 - 1783), Бернулли (1700 - 1782), Лагранжа (1736 - 1813), Лапласа (1749 - 1827), Пуассона (1781 - 1840), Фурье (1768 - 1830) и других ученых. Интересно то, что многие из них были не только математиками, но и астрономами, механиками, физиками. Разработанные ими при исследовании конкретных задач математической физики идеи и методы оказались применимыми к изучению широких классов дифференциальных уравнений, что и послужило в конце XIX века основой для развития общей теории дифференциальных уравнений.

В настоящее время важную роль в развитии теории дифференциальных уравнений играет применение современных электронных вычислительных машин. Исследование дифференциальных уравнений часто облегчает возможность провести вычислительный эксперимент для выявления тех или иных свойств их решений, которые потом могут быть теоретически обоснованы и послужат фундаментом для дальнейших теоретических исследований.

**2. Основные понятия дифференциальных уравнений.**

Рассмотрим движение тела массы $m$ в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $k$. По второму закону Ньютона можно записать:

$$ma = -kv.$$

Так как ускорение – первая производная скорости, $a = v'$

$$mv' = -kv.$$

В это уравнение входит неизвестная величина $v$ и ее производная по времени $v'$.

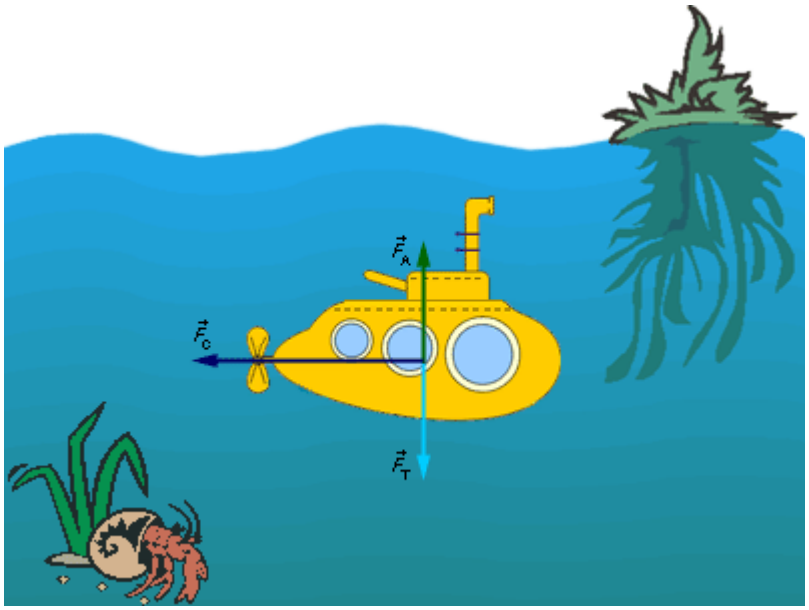


Рисунок 1. Движение тела в вязкой среде в отсутствие движущей силы.

Уравнения, подобные этому, нередко встречаются в физике, химии, экономике и других дисциплинах. Уравнение вида

$$f\left(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}\right) = 0$$

называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка***. Решением этого уравнения является произвольная функция $y = y(x)$, подстановка которой в уравнение превращает его в верное тождество.

Простейшим дифференциальным уравнением является уравнение вида

$$y' = f(x).$$

Чтобы его решить, нужно представить производную $y'$ как $\frac{dx}{dy}$ домножить обе части уравнения на $dx$ и проинтегрировать обе части получившегося уравнения:

$$y = \int f(x)dx + C$$

Как видно, это уравнение имеет бесконечное количество решений, отличающихся друг от друга на постоянную $C$. Выбрать конкретное решение уравнения можно, если знать начальные условия, например, точку, через которую проходит график функции $y = y(x)$. Так, если известно, что

$$y(x_0) = y_0,$$

то, подставляя это значение в общее решение $y = \int f(x)dx + C = F(x) + C,$ получаем, $y_0 = F(x_0) + C,$ откуда $C = y_0 - F(x_0)$ и $y = y_0 + F(x) - F(x_0).$

Это решение можно записать в виде $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$

***Общим решением*** дифференциального уравнения называется функция $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящая от $n$ констант, если она является решением дифференциального уравнения при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

**3. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.**

Уравнение

$F(x, y, y') = 0,$

где $y = y(x)$ — неизвестная, непрерывно дифференцируема на $(a,b)$ функция, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Функция $y = y(x)$ называется *решением дифференциального уравнения*

$F(x, y, y') = 0,$

если она непрерывно дифференцируема на $(a,b)$ и $F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ для всех $x$ из $(a,b)$ .

Дифференциальное уравнение 1–го порядка имеет бесконечно много решений. Для того чтобы выделить единственное решение, нужно задать дополнительные (начальные) условия.

Задача отыскания решения $y = y(x)$ уравнения $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши* (или начальной задачей). Условие $y(x_0) = y_0$ — начальное условие.

Любое конкретное решение $y = y(x)$ (решение задачи Коши) уравнения 1–го порядка, называется *частным решением уравнения*.

Уравнение 1-го порядка, разрешенное относительно производной, называют уравнением, записанными в нормальной форме:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Уравнения первого порядка часто записывают в *дифференциальной форме*:

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$

Решение такого уравнения можно искать как в виде $y = y(x)$ , так и в виде $x = x(y)$ .

*Пример 1.*

Решением уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

при всех $x \neq 0$ является функция

$$y = \frac{1}{x} + Cx.$$

Действительно, подставив выражение для $y(x)$ в левую

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} + Cx\right) = -\frac{1}{x^2} + C$$

и в правую часть уравнения

$$\frac{y}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + Cx\right) - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x^2} + C - \frac{2}{x^2} = -\frac{1}{x^2} + C.$$

получили тождественное равенство

$$-\frac{1}{x^2} + C \equiv -\frac{1}{x^2} + C,$$

справедливое при всех $x \neq 0$ и при произвольных значениях константы $C$.

*Пример 2.*

Решением задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{2}{x^2},\ y(1) = 1, x \neq 0$$

является функция

$$y = \frac{1}{x}$$

Действительно, подставив выражение для $y(x)$ в левую и в правую часть уравнения, получим тождественное равенство:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2};\ \frac{y}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^2} = -\frac{1}{x^2};\ -\frac{1}{x^2} \equiv -\frac{1}{x^2}, x \neq 0.$$

Начальное условие тоже, очевидно, выполнено:

$$y(1) = y(x)\big|_{x=1} = \frac{1}{x}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1.$$

*Пример 1.* Решить дифференциальное уравнение $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

**<u>Решение :</u>**

$(x^2 - 1)dy = -2xy^2 dx$;

Разделяем переменные $\frac{dy}{y^2} = -\frac{2x}{x^2-1}dx$.

Интегрируем обе части последнего равенства

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{2x}{x^2-1}dx$$

В результате получим

$$\frac{1}{y} = \ln\left|x^2-1\right| + C$$

Таким образом, получаем общий интеграл

$$y\left(\ln\left|x^2-1\right| + C\right) = 1$$

Находим частное решение уравнения. Подставляем начальное условие

$$y(0) = 1$$

1(0 + C) = 1; C = 1

Отсюда получаем частный интеграл

$$y\left(\ln\left|x^2-1\right| + 1\right) = 1$$