Логарифмы, их свойства.

Логарифмическое тождество, формула перехода.

1. Итак, мы знаем, что $a^n = b$, а если n – неизвестно? Как можно найти показатель степени из равенства: $2^x = 14$? Никакие известные нам действия не помогут. Вот поэтому вводится новое понятие, понятие логарифма.

<u>Определение</u>: Логарифмом числа называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить данное число: $\log_a b = c; \quad a > 0$ согласно определения имеем $a^c = b$, и тогда $a^{\log_a b} = b$ – основное логарифмическое тождество.

$5^{\log_5 2} = 2; \qquad 0,2^{\log_{0,2} 3} = 3.$

Логарифмы обладают свойствами:

1.1. Логарифмы отрицательных чисел на существуют (положительное число в любой степени есть число положительное).

1.2. Логарифм единицы при любом основании равен нулю, $\log_a 1 = 0$, т.к $a^0 = 1$.

1.3. Логарифм самого основания равен 1, то есть $\log_a a = 1$, т.к. $a^1 = a$

1.4. Логарифм произведения при любом основании равен сумме логарифмов сомножителей при этом же основании.

$$\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$$

1.5. Логарифм дроби при любом основании равен разности логарифма числителя и логарифма знаменателя при этом же основании

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$$

1.6. Логарифмом степени при любом основании равен произведению показателя степени на логарифм основания степени.

$$\log_a N^m = m \cdot \log_a N$$

Логарифм числа с основанием 10 называется десятичным и имеет особую запись.

$\log_{10} b = \lg b$

Логарифм числа с снованием *e* называется натуральным и имеет также особую запись $\log_e b = \ln b$. $e \approx 2,718$ число Непера.

А если надо вычислить логарифм числа при любом основании? Что делать? Надо перейти к основанию 10 или *e*.

По определению логарифма $a^{\log_a N} = N$, используя свойство логарифмов (смотрите свойство 6) имеем $\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a$

и тогда $\boxed{\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}}$ и называется формулой перехода от одной системы логарифмов к другой. Эта формула часто применяется при решении

логарифмических уравнений и неравенств $\log_a N = \frac{\lg N}{\lg a}; \log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}$, что даёт возможность вычисления выполнять при помощи МК.

Решить: $\log_{1,24} 618,7 = \frac{\lg 618,7}{\lg 1,24} = 29,88$

$$\log_{1,24} 618,7 = \frac{\ln 618,7}{\ln 1,24} = 29,88$$

Замечания: 1) $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$, т.е. 2) $\boxed{\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b}$ 3) $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$

Используя определение логарифма, можно находить переменную.
Рассмотрим на конкретных примерах

1. $\log_{\sqrt{3}} x = -2$ по определению логарифма $\left(\sqrt{3}\right)^{-2} = x \Rightarrow x = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
2. $\log_x \frac{1}{27} = -3$ по определению логарифма

   $x^{-3} = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{1}{x^3} = \frac{1}{27}; \quad x^3 = 27; \quad x = 3$
3. $\log_{\sqrt[3]{2}} 64 = x$ по определению логарифма

   $\left(\sqrt[3]{2}\right)^x = 64 \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}x} = 64 \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}x} = 2^6; \quad \frac{1}{3}x = 6; \quad x = 18$
4. $\log_{\sqrt{x}} 8 = 3; \quad \left(\sqrt{x}\right)^3 = 8; \quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 8; \quad x^{\frac{3}{2}} = 8; \quad \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}; \quad x = 2^2 = 4$
5. $\log_{\frac{2}{3}} 2,25 = x; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2\frac{1}{4}; \quad \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{4}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}; \quad \Rightarrow x = -2$
6.

   $\log_{5\sqrt[3]{5}} x = -0,8; \quad \left(5\sqrt[3]{5}\right)^{-0,8} = x; \quad x = \left(5 \cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(5^{1\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = 5^{-\frac{16}{15}} = \frac{1}{5^{\frac{16}{15}}} = \frac{1}{5^{1\frac{1}{15}}} = \frac{1}{5\sqrt[15]{5}};$
7. $\log_4 36 + \log_2 10 - 2\log_2 \sqrt{15} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 5} = \log_{2^2} 6^2 + \log_2 10 - 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 15 + 2^{2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 5} =$

   $= \frac{2}{2}\log_2 6 + \log_2 10 - \log_2 15 + 2^{\log_2 5} = \log_2 \frac{6 \cdot 10}{15} + 5 = \log_2 4 + 5 = 2 + 5 = 7$
8. $0,04^{1+\log_5 0,02} - \sqrt{2}^{\log_2 25} = \left(\frac{1}{25}\right)^{1+\log_5 \frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} = \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} = \frac{1}{25} \cdot 5^{-2\log_5 \frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} =$

   $= \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^{-2} - 25^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{25} \cdot 2500 - 5 = 100 - 5 = 95$

9. $\log_{2\sqrt[5]{2}} x = \frac{5}{6}$ $\qquad x = \left(2\sqrt[5]{2}\right)^{\frac{5}{6}} = \left(2^1 \cdot 2^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} = \left(2^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} = 2$

10. $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{81} = x$ $\quad \left(3\sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{81}$; $3^{\frac{3}{2}x} = 3^{-4}$

11. $\frac{\log_3 27 - \log_3 1}{\log_3 4,5 + \log_3 \frac{2}{3}} = \frac{3-0}{\log_3\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{\log_3 3} = \frac{3}{1} = 3$

12. $49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4} = \frac{49}{49^{\log_7 2}} - 4^{-1} = \frac{49}{7^{2\log_7 2}} - \frac{1}{4} = \frac{49}{4} - \frac{1}{4} = \frac{48}{4} = 12$

Практическая работа

1. Вычислите $\log_4 100 + \log_4 0,64$;

1. -2 2. -1 3. 3 4. 4

2. Найдите значение выражения $2 \cdot 1,3^{\log_{1,3} 26}$;

1. 2,6 2. 2 3. 52 4. 40

3. Упростите выражение $\lg\sqrt{500} - \lg\sqrt{125}$;

1. $\lg 2$ 2. 0,5 3. 3 4. $3\lg 5 + 1$

4. Найдите значение выражения $-2\log_3 (3)^5$;

1. 5^{-2} 2. -10 3. 3 4. -32

5. Найдите значение выражения $3 \cdot 2^{\log_2 5}$;

1. $\log_2 15$ 2. 125 3. 30 4. 15

6. Найдите значение выражения $0,7^{\log_{0,7} 3} + \log_3 54 - \log_3 2$;

1. 51 2. 30 3. 6 4. 15,25

7. Найдите значение выражения $\log_5 375 - \log_5 3 - 1,3^{\log_{1,3} 7}$;

1. 118 2. 4 3. -4 4. 11