Занятие Системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Определитель второго порядка, его свойства. Правило Крамера при решении систем уравнений.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными

в общем виде имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Решением системы уравнений называется упорядоченная пара чисел, удовлетворяющая каждому уравнению этой системы. При решении такой системы могут быть использованы известные методы: 1) подстановки; 2) алгебраического сложения; 3) графически.

Но существует ещё метод решения, который особенно удобен в том случае, когда коэффициенты $a_1; a_2; b_1; b_2$ отличны от единицы или содержат буквенные выражения.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Число $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ называется определителем второго порядка. Вертикальные прямые – знак определителя. Обозначается определитель знаком "Δ" (дельта).

Итак определитель – это число, которое вычисляется по определенному правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$ – первый столбик (коэффициенты при переменной x)

$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$ – второй столбик (коэффициенты при переменной y)

$a_1 \quad b_1$ – первая строчка (коэффициенты при переменных первого уравнения)

$a_2 \quad b_2$ – вторая строчка (коэффициенты при переменных второго уравнения)

Определители при переменных Δ_x и Δ_y получаются из определителя системы путем замены соответствующего столбика столбиком из свободных членов.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Для нахождения значений переменных x и y используются формулы $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, которые называются формулами Крамера.

Исследуем

1) Если $\Delta \neq 0$ – система имеет единственное решение
2) Если $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ система не имеет решения

3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 0$ и $\Delta_y = 0$ – система имеет множество решений.

Например $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 6x + 5y = 1 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 6 \cdot (-4) = 15 + 24 = 39$ $\quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 \cdot 7 = -39$

Ответ: (1; –1).

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 35 - (-4) \cdot 1 = 35 + 4 = 39$ $\quad x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{39}{39} = 1$ $\quad y = \dfrac{-39}{39} = -1$

Основные свойства определителя

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

2. При перестановке двух столбцов (строчек) определитель меняет свой знак на противоположный.
3. Определитель, имеющий два одинаковых или пропорциональных столбца (строчки) равен нулю.
4. Общий множитель столбца (строчки) определителя можно вынести за знак определителя.

Рассмотрим примеры:

Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 5x - 7y = 19 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot (-7) = 15 + 14 = 29$ $\Delta \neq 0,$ система имеет единственное решение

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 19 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 57 - (-4) \cdot (-7) = 57 - 28 = 29$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 2 \cdot 19 = -20 - 38 = -58$ Ответ: (1; –2).

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{29}{29} = 1;$ $\quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-58}{29} = -2$

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными следует помнить, что решение можно выполнить любым из известных методов решения, просто следует выбрать каким методом более рационально для данной системы.

3) $\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases}$

Решим систему всеми способами, т.е. убедимся, что результат получается одинаковый и определимся, какой из методов более рационально применим для данной системы.

1) <u>Способ подстановки</u>.

$\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ 10x + 7y = 5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + \dfrac{8}{3}y = \dfrac{31}{3} \\ 10x + 7y = 5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{31}{3} - \dfrac{8}{3}y \\ 10\left(\dfrac{31}{3} - \dfrac{8}{3}y\right) + 7y = 5 \end{cases}$

Решаем второе уравнение относительно «*y*»: $\frac{310}{3}-\frac{80}{3}y+7y=5$, приведем к общему знаменателю и так как $3\neq 0$, то

$310-80y+21y=15$

$-59y=15-310$

$-59y=-295;\quad y=\frac{-295}{-59}=5$ Ответ: $x = -3$; $y = 5$.

$y=5$, тогда $x=\frac{31}{3}-\frac{8}{3}\cdot 5=\frac{31}{3}-\frac{40}{3}=-\frac{9}{3}=-3$

2) Способ алгебраического сложения

$\begin{cases}3x+8y=31\\-10x-7y=-5\end{cases}$ уравняем по модулю коэффициенты при x, для этого умножим первое уравнение на 10, а второе – на 3.

$\begin{cases}3x+8y=31\\-10x-7y=-5\end{cases}\left|\begin{matrix}10\\3\end{matrix}\right.\qquad \begin{cases}30x+80y=310\\-30x-21y=-15\end{cases}$ почленно сложим

$59y=295$

$y=5$

подставим $y = 5$ в любое из уравнений системы, например в первое, и найдем x

$3x+8\cdot 5=31$

$3x+40=31$

$3x=-9$

$x=-3$

получаем $x = -3$; $y = 5$, как и в первом случае.

3) С помощью определителя:

$\begin{cases}3x+8y=31\\-10x-7y=-5\end{cases}$

$\begin{cases}3x+8y=31\\10x+7y=5\end{cases}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}3&8\\10&7\end{vmatrix}=21-80=-59\neq 0$ единственное решение

$\Delta_x=\begin{vmatrix}31&8\\5&7\end{vmatrix}=217-40=177\qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}3&31\\10&5\end{vmatrix}=15-310=-295$

$x=\frac{177}{-59}=-3;\qquad y=\frac{-295}{-59}=5$

Ответ: (–3; 5).

Каким же способом более рационально можно было решить эту систему? Вы правы, конечно с помощью определителя.

<u>Самостоятельно</u> (любым способом)

1) $\begin{cases}4x-9y=22a\\11x+5y=a\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x-3y=11\\6x-9y=33\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\\\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=1\end{cases}$

Контрольные вопросы.

1. Что называется определителем II порядка?
2. Как вычисляется определитель II порядка?
3. Какими свойствами обладает определитель?

Занятие Системы трех линейных уравнений с тремя переменными. Определитель III порядка

Система трех линейных уравнений с тремя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

На 2 курсе рассматривается решение такой системы с помощью определителя третьего порядка.

Выражение, составленное из коэффициентов при переменных в виде таблицы $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ называется определителем третьего поряда.

Определитель третьего порядка вычислить можно через определитель второго порядка или по правилу Саррюса (правило треугольника).

1) Через определитель II порядка.

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13} \cdot \left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right)$$

Выделяем a_{11} и мысленно вычеркиваем по столбику и строчке, оставшиеся члены составляют определитель второго порядка. Берем a_{12} с противоположным знаком и вычеркиваем первую строчку и второй столбик, оставшиеся члены составляют определитель II порядка. Аналогично берем a_{13} и вычеркиваем первую строчку и третий столбик, оставшиеся члены составляют определитель II порядка.

Выполняем вычисления определителей II порядка по известному уже нам правилу. Например:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(-1 - 21\right) + 2\left(4 - 15\right) - 4\left(-28 - 5\right) =$$

$$= -66 - 22 + 132 = -88 + 132 = 44;$$

2) Правило треугольника (Саррюса). Рассмотрим схематически

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}_a - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}_b$$

a) (основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

b) (основания равнобедренных треугольников параллельны побочной диагонали)

Пример: (возьмем тот же определитель)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 30 + 112 + 20 - 63 + 8 = -96 + 140 = 44$$

В дальнейшем запись будем вести так

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -5 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 6+6+120-6-16-45 = 132-67 = 65$$

$$\left(\begin{array}{l} 2\cdot1\cdot3+(-3)\cdot(-2)\cdot1+(-5)\cdot(-4)\cdot6-1\cdot1\cdot6-(-4)\cdot(-2)\cdot2-(-5)\cdot(-3)\cdot3= \\ =6+6+120-6-16-45=132-67=65 \end{array} \right)$$

Определители $\Delta_x;\Delta_y;\Delta_z$ получаются из определителя системы путем замены соответствующего столбика столбиком из свободных членов и вычисляются по тому же правилу, что и определитель системы.

Для нахождения значений $x;y;z$ пользуются правилами Крамера

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}; \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Исследование:

1. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение
2. Если $\Delta = 0$, то система несовместима, т.е. не имеет решения
   (либо $\Delta_x \neq 0$; либо $\Delta_y \neq 0$; либо $\Delta_z \neq 0$)
3. Если $\Delta = 0$, то система неопределенна, т.е. имеет множество решений
   ($\Delta_x = 0$ и $\Delta_y = 0$ и $\Delta_z = 0$)

Определитель III порядка обладает всеми свойствами определителя II порядка.

Например, решить систему уравнений

$$1)\begin{cases} 3x+y+z=-2 \\ 5x-y-z=10 \\ x-y+5z=-12 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 15-1-5+1-3-25=-20-28=-48\neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 10+12-10-12+2-50=24-72=-48$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 150+2-60-10-36+50=202-106=96$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 36+10+10-2+30+60=56+90-2=146-2=144$$

$$x=\frac{-48}{-48}=1; \quad y=\frac{96}{-48}=-2; \quad z=\frac{144}{-48}=-3$$

Ответ: (1; –2; –3).

$$2)\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 4x+2y+2z=8 \\ 6x+3y+3z=12 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_x=0,\ \Delta_y=0,\ \Delta_z=0,$$

так как коэффициенты при переменных и свободные члены пропорциональны.

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{6}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Система имеет множество решений, т.е. неопределена.

$$3)\begin{cases} x-3y+z=7 \\ 3x+y-2z=3 \\ x+7y-4z=0 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -4 \end{vmatrix}=-4+6+21-1+14-36=-41+41=0.$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix}=-28+0+21-0+98-36=-64+119=55\neq 0$$

Δ_y и Δ_z можно уже не находить. Следовательно система не имеет решения.

Самостоятельно:

$$1)\begin{cases} 2x+3y-z=7 \\ 4x+5y-4z=3 \\ 3x-3y+2z=2 \end{cases} \qquad \left(\Delta=-37;\, x=1;\, y=3;\, z=4\right)$$

$$2)\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 2x-4y+6z=5 \\ 4x-8y+12z=7 \end{cases} \qquad \left(\Delta=0\,\text{система не имеет решения}\right)$$

$$3)\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x-y+z=1 \\ 13x+2y+z=13 \end{cases}$$

($\Delta=0; \Delta_x=0; \Delta_y=0; \Delta_z=0$ система имеет множество решений)

Контрольные вопросы:

1) Общий вид системы трех линейных уравнений с тремя переменными.
2) Что называется определителем III порядка?
3) Правила вычисления определителя III порядка (через определитель II порядка, правило треугольника).
4) Свойства определителя III порядка.
5) Формулы (правила) Крамера.

$$\begin{vmatrix} 1{,}21 & -5{,}26 & 3{,}83 \\ -2{,}3 & 1{,}78 & 2{,}36 \\ 4{,}7 & 0{,}26 & -0{,}748 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 4.72 & 0.347 & 5.2 \\ -1.86 & -1.23 & -1.45 \\ -0.38 & 0.723 & 2.72 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 2{,}73 & -3{,}21 & 1{,}53 \\ -0{,}43 & 1{,}87 & -0{,}46 \\ 1{,}26 & -0{,}52 & -1{,}26 \end{vmatrix};$$