Занятие Понятие предела функции в точке и на бесконечности. основные теоремы о пределах. Первый замечательный предел. Техника вычисления пределов функций.

Самым фундаментальным понятием математического анализа является понятие предела функции. Так случилось в математическом познании человечеством природы, что основные понятия математического анализа – производная, интеграл, ряд и др. – были открыты в XXVII веке, а вот строгое обоснование этих понятий спустя 150 лет на основе понятия предела. Это понятие будет сопровождать Вас на протяжении всего Вашего математического образования, поэтому очень важно с первого занятия освоить это понятие.

Различают – предел функции в точке и предел функции на бесконечности. Сначала рассмотрим предел функции в точке, т.е. при $x \to a$.

С одной стороны это понятие может оказаться простым и очевидным.

Пусть дана функция f(x) = x^2 + x и известно, что $x \to 2$, т.е. принимает значения достаточные близкие к 2. Очевидно, что f(x) будет принимать значения близкие к 6, т.е. f(2).

При этом пишут $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x)=6$, или в общем виде: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. И читают: предел функции f(x) при в точке a (или при x стремящемся к a) равен b. (Никогда не говорите «лим» или «лимит»)

Но не все так просто! Рассмотрим функцию: $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$. Очевидно, что эта функция существует при всех действительных x, кроме x = 1 – обратите на это особое внимание!

Пусть теперь $x \to 1$ слева или справа. Составим таблицу значений.

X	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
f(x)	4,9	4,99	4,999	4,9999	4,99999	4,999999

Очевидно, что f(x) стремится к 5. А если x будет стремиться к 1 справа?

X	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	1,000001
f(x)	5,1	5,01	5,001	5,0001	5,00001	5,000001

Как видим, и в этом случае $f(x) \to 5$. Вот так, а f(1) не существует!

Дадим строгое определение предела функции в точке, это определение одно из нескольких и называют определением «на языке ε – δ» или определением по Коши.

Пусть функция y = f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a, кроме, быть может, в самой этой точке.

Число b называется пределом этой функции в точке x = a (или при $x \to a$), если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое число δ > 0, что для всех x удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x)-b| < \varepsilon$.

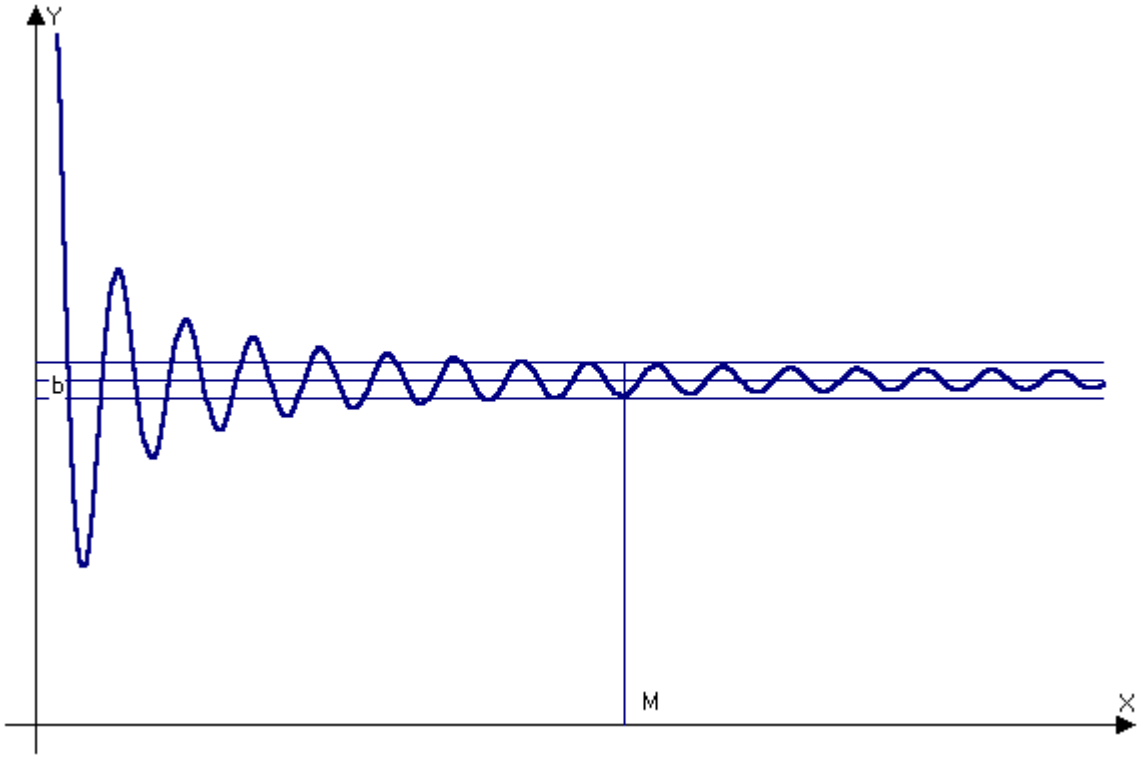
Постарайтесь запомнить это определение.

В приведенном выше примере a = 1, b = 5. Из таблиц очевидно, как только x будет отличаться от 1 меньше, например, чем на 0,01, то f(x) отличается от 5 также меньше, чем на 0,01. В этом сущность данного определения.

Сформулируем определение предела функции на бесконечности.

Пусть функция y = f(x) определена при достаточно больших x (при $x \to \infty$).

Число b называется пределом этой функции при $x \to \infty$, если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое значение аргумента x = M, что для всех x > M соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x)-b| < \varepsilon$. (или соответствующие значения функции будут принадлежать интервалу $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$)



Рассмотрите рисунок и убедитесь, что для всех x > M соответствующие значения функции будут отличаться от b меньше, чем на ε. В этом случае говорят и пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Различают предел функции на плюс бесконечности и на минус бесконечности, во втором случае пишут $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Сформулируем некоторые свойства пределов.

1) $\lim kf(x) = k\lim f(x)$, что означает: постоянный множитель можно выносить за знак предела.

2) $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$. Сформулируйте это свойство самостоятельно. Вообще говоря, это свойство можно распространить на алгебраическую сумму конечного числа функций.

3) $\lim(f(x)\cdot g(x)) = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$. Сформулируйте самостоятельно.

4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, *если* $\lim g(x) \neq 0$. Предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля.

5) $\lim\limits_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$, это означает, что предел многочлена при $x \to a$ равен значению многочлена в точке x = a.

6) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{P_n(a)}{Q_m(a)}$, *если* $\lim\limits_{x\to a} Q_m(x) \neq 0$. Т.е. предел дробно-рациональной функции равен значению этой функции, если предел знаменателя отличен от нуля.

Умение находить пределы функций – необходимое условие для дальнейшего успешного изучения математического анализа. Это умение базируется на свойствах пределов (повторите их) и умений в преобразовании алгебраических выражений.

Рассмотрим вычисление пределов функций на бесконечности. Абсолютно так же вычисляются пределы числовых последовательностей.

Ключом к вычислению таких пределов является: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ Вдумайтесь почему: в числителе константа, в знаменателе x, который стремится к бесконечности, в пределе 0.

Или в более общем виде: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0$ (*) , где k и n – константы.

Еще ключ для вычисления пределов на бесконечности: $\lim\limits_{x\to\infty}|q|^x=0$, где $|q|^x<1$. Так

$\lim\limits_{x\to\infty}0{,}99^x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3}{4})^x=0$, а вот $\lim\limits_{x\to\infty}1{,}000001^x=\infty$

Рассмотрим конкретные примеры.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2x^2+5x}=0$ очевидно, в силу (*) 2. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)=\infty$ Пишут знак бесконечности, а говорят «предел не существует». Итак, для закрепления: если переменная *только* в знаменателе, то предел равен нулю, если переменная только в числителе, то предел не существует. Убедитесь, что

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{100^{100}}{0{,}000001x+1}=0$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{20000000}=\infty$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{0{,}1x}{0{,}345}=\infty$

Как быть, если переменная, которая стремится к бесконечности, и в числителе и в знаменателе, т.е. и числитель и знаменатель стремятся к бесконечности? В этом случае говорят, что имеем *неопределенность вида* $\frac{\infty}{\infty}$, а сам процесс вычисления пределов называют словосочетанием «*раскрытие неопределенностей*».

Процесс раскрытия таких неопределенностей рассмотрим на конкретных примерах. Пусть необходимо вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+5x}$. Отыскивают старшую степень переменной (в данном случае она, очевидно, вторая) и *делят каждое слагаемое числителя и знаменателя на эту старшую степень переменной*, проводя в уме сокращения.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2+\frac{5}{x}}$ = (применяя «ключ» и теоремы о пределах, далее имеем) $=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$. Заметим, что если под знаком предела содержится переменная, то сам знак предела *записывать обязательно*, в противном случае – нет.

Рассмотрим еще примеры.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2-7x+15}{2x^3+5x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{15}{x^3}}{2+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{4+0-0+0}{2+0+0}=2.$

Легко видеть, что *если старшая степень числителя и знаменателя совпадают, то предел такого вида всегда будет равен отношению коэффициентов при старших степенях переменной*. Поэтому ответ можно писать сразу, не проводя деления:

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^6+13x^4+8x^3+x^2+3}{2x^6+4x^3+5x}=2{,}5$ А если степени не равны? Если степень знаменателя выше степени числителя, то в пределе все слагаемые числителя будут равны нулю. В самом деле:

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+11x^2+x+5}{2x^4+3x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{11}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4}}{2+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^4}}=\frac{0+0+0+0}{2+0+0}=0$. Итак, *если степень знаменателя выше степени числителя, то предел такого вида равен нулю*.

Если же старшая степень числителя выше степени знаменателя, то, очевидно, все слагаемые знаменателя в пределе будут равны нулю, это означает, что предел не существует:

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+2x^2+3x+2}{2x^4+7x^2+1}=\dfrac{1+0+0+0}{0+0+0}=\infty.$

Вычислите самостоятельно пределы функций на бесконечности.

10. $f(x)=\dfrac{x^2+4x\ +2}{5x^2+3x\ +1}$ 11. $h(x)=\dfrac{3x}{x^2+x\ +7}$ 12. $g(x)=\dfrac{x^4+4x^2+7}{x^2+4x\ +3}$

13. $w(x)=\dfrac{6x^3+3x\ +1}{x^3+x\ +13}$

Рассмотрим теперь методику вычисления пределов в точке. Упрощенно, на первых шагах техники освоения пределов, будем считать, что если функция существует в точке x = a, то ее предел равен f(a). Так, $\lim\limits_{x\to3}(2x+5)=11;$ $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+2x-3)=-3;$ $\lim\limits_{x\to1}(2x^3+5x-1)=6;$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x}{2x-1}=1{,}8;$ $\lim\limits_{x\to1}\ln\dfrac{2x+1}{x+3}=\ln\dfrac{3}{4};$ $\lim\limits_{x\to2}e^{2x}=e^4$ И т.д.

Рассмотрим наиболее популярный вид – пределы дробно-рациональных функций.

Итак, если знаменатель такой функции отличен от нуля, то функция существует в точке, то ее предел равен ее значению в этой точке. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+1}=3{,}5;$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x+5}{x^2+1}=5$

Если же функция в точке x = a не существует, *в знаменателе дроби ноль,* то вычисляем значение числителя в этой точке. При этом, если числитель отличен от нуля, то предел не существует:

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x}{x-3}=\infty;$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+1}{x^2-1}=\infty;$ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3}{x^3-x^2-4}=\infty$

Если и в знаменателе и в числителе нули, то, говорят, имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Методика раскрытия таких неопределенностей проста. Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции при x = a, то разложение на множители и числителя и знаменателя обязательно содержат сомножитель (x – a), на который дробь будет сокращена. Покажем на примере.

14 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}=$(выяснили, что при x = 1 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, уже зная один из сомножителей (x – 1), второй сомножитель для квадратного трехчлена нетрудно подобрать устно, не используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители) =

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x+5}{x-3}=\frac{6}{-2}=-3.$$

Такова методика, которую необходимо четко усвоить. Еще примеры.

15 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5x+3}{3x^2+2x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(2x+3)}{(x+1)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+3}{3x-1}=\dfrac{1}{-4}$

16 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-9x+14}{x^2+3x-10}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-7)}{(x-2)(x+5)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-7}{x+5}=\dfrac{-5}{7}=-\dfrac{5}{7}$

Активно используйте формулы сокращенного умножения:

32. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

17 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5x^2+9x-2}{3x^2+5x-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(5x-1)}{(x+2)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5x-1}{3x-1}=\dfrac{-11}{-7}=\dfrac{11}{7}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3x-2}{2x^2-11x+5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2(x-\frac{1}{2})(x+2)}{2(x-\frac{1}{2})(x-5)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(x-5)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x+2}{x-5}=\frac{2,5}{-4,5}=-\frac{5}{9}$$

Следующие пределы вычислите самостоятельно.

19 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+5x-6}{2x^2+3x-5}$ 20 $\lim\limits_{x\to3}\frac{4x^2-11x-3}{x-3}$ 21 $\lim\limits_{t\to2}\frac{t^2-6t+8}{t^2+t-6}$

22. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$; 23 $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$; 24 $\lim\limits_{x\to0,5}\frac{2x^2-7x-4}{6x^2+7x+2}$

Получите у преподавателя номер варианта практической работы и выполняйте ее

Варианты практических работ для студентов второго курса

Вариант 1

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{x^3+5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-7x+10}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{4+x}-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+27}{x^2-3x+9}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{3x^3-5x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{4-7x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{Sin3x-Sinx}{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x$; 13) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x}{2x+1})^x$; 14) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 2

1) $\lim\limits_{x\to3}\frac{4x^2-11x-3}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{3x^2-4x}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3-\sqrt{9-x}}{2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{7x+4}{x^2-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}-5}$; 7) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x^2+x-6}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{4x+3x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{Sin5x-3x^2}{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x$; 13) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$.

Вариант 3

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-x-6}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3+5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5-\sqrt{25-x}}{2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{5x+3}{2x^2-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}$

6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{26-x}-5}$; 7) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{x^2+2x-8}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{5x+3x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{Sin5x-3x^2}{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x$; 13) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$.