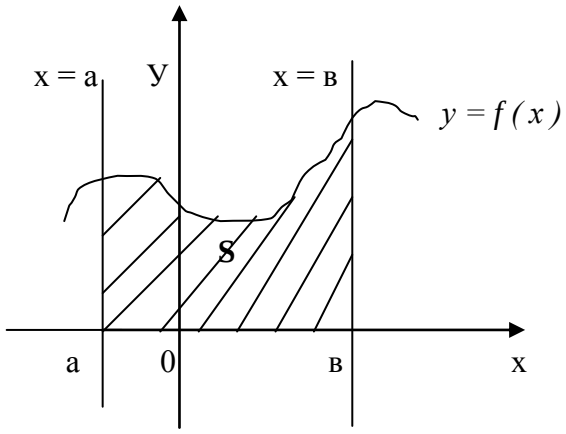
Приложение определенного интеграла к решению задач

1. Криволинейная трапеция.

Определение: Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной функции, прямыми х = а и х = в и осями координат.



Формула Ньютона - Лейбница

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Плоская фигура – это фигура, лежащая в плоскости ХОУ и состоящая из криволинейных трапеций.

Алгоритм вычисления площади плоской фигуры:

1. Построить графики заданных функций.

2.Найти точки пересечения графиков функций. Абсциссы точек пересечения графиков функций будут являться пределами интегрирования.

3.Представить площадь плоской фигуры как сумму или разность площадей криволинейных трапеций.

4.Вычислить площадь каждой трапеции по формуле Ньютона – Лейбница.

Пример 1. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями* $x + y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 2$.

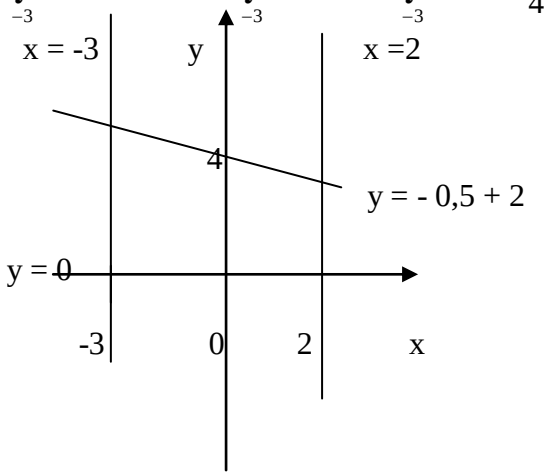
Решение: х + у – 4 = 0 линейная функция. Приведем ее к виду у = кх+в.

2 у = 4 – х, у = - 0,5 + 2.

У = 0 ось ОХ, х = -3 и х = 2 –прямые параллельные оси ОУ, проходящие через точки (- 3; 0) и (2; 0)

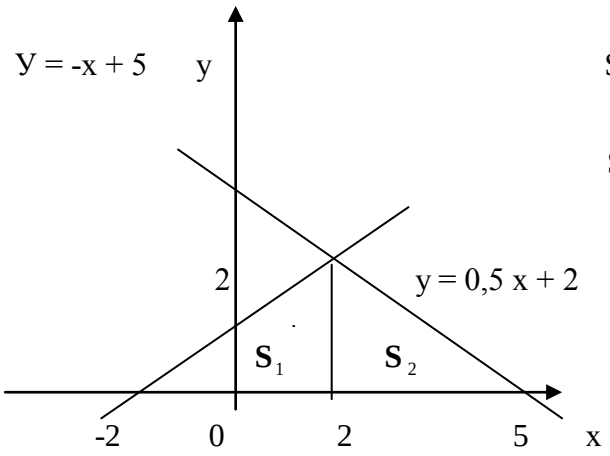
$$\int_{-3}^{2}(-0{,}5x+2)dx=\int_{-3}^{2}-0{,}5xdx+\int_{-3}^{2}2dx=-\frac{x^2}{4}\Big|_{-3}^{2}+2x\Big|_{-3}^{2}=11\frac{1}{4}\,(\text{ед}^2)$$

S =



Пример 2: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями x – 2 y + 4 = 0, x + y = 5, y = 0.

Решение: После преобразований уравнения прямых имеют вид: y = 0,5 x + 2 и y = - x + 5.Эти прямые пересекаются в точке с абсциссой x = 2. У= 0 – ось OX. Для определения точки пересечения графиков функций необходимо решить уравнение 0,5 x + 2 = - x + 5. Получаем x = 2. Построим графики заданных функций на одной координатной плоскости. Полученную фигуру разобьем на две криволинейных трапеции по точке пересечения. Площадь фигуры находится как сумма площадей криволинейных трапеций.



$$S_1=\int_{-2}^{2}(0{,}5x+2)dx$$

$$S_2=\int_{2}^{5}(-x+5)dx$$

$$S = S_1+S_2 = 13{,}5\ (\text{ед}^2)$$

Примечания:

1. Если график функции лежит ниже оси OX, то площадь вычисляют **по абсолютной величине, т.е. модулю**.

2. Если график одной функции лежит выше, чем график другой функции, то при вычислении площади фигуры “**из верхней функции вычитают нижнюю**”.

3. Если фигура симметричная, то нужно вычислить площадь **половины фигуры** и умножить ее на 2.

Самостоятельная работа № 7
Тема: «Решение задач с помощью определенного интеграла»

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.
2. $У = 2x - x^2$, $y = 0$.
3. $У = 2x$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.
4. $У = x^2 - 2x + 2$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$.
5. $У = -x^2 + 4$, $y = 0$.
6. $X - 2y + 4 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$, $y = 0$.
7. $У = 8 + 2x - x^2$, $y = x + 6$.
8. $У = 2x^2 - 2$, $y = x^2$.
9. $У = = x^2 + 1$, $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$.
10. $У = x^3$, $x = -2$, $x = 2$.