Занятие: Уравнения и неравенства с одной переменной, их решение.

1) Уравнения I–II степени с одной переменной
2) Неравенства I–II степени с одной переменной
3) Метод интервалов
4) Выдача домашнего задания

Уравнения с одной переменной.

$ax+b=0, \left(x=\frac{-b}{a}, a\neq 0 \right)$ – линейное уравнение I степени с одной переменной

$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ – уравнение II степени с одной переменной

$$\boxed{D=b^2-4ac; \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$$

Решить уравнение – значит найти множество его корней или доказать, что их нет. это множество называют решением уравнения.
Два уравнения называются **равносильными** если решение (корень) одного уравнения является решением (корнем) другого уравнения и наоборот.
Уравнения $x=0$ и $x\left(x^2+3\right)=0$ равносильны, так как оба имеют единственный корень $x=0$.

Уравнения $x^2-x=0$ и $\frac{x^2+2}{x}=\frac{x+1}{x}$ – неравносильны, так как $x=0$ является корнем первого уравнения, но не удовлетворяет второму уравнению.
Уравнения $2x-10=0$ и $\left(2x-10\right)\left(x+1\right)=0$ неравносильны, так как корень первого уравнения $x=5$, а второе уравнение кроме этого корня имеет еще корень $x=-1$, который не является корнем первого уравнения.

Решим уравнения:

$$а)\left(3x+1\right)^2+\left(4x-1\right)^2=\left(5x-2\right)^2$$

раскроем скобки, применяя формулы сокращенного умножения $\left(a+b\right)^2$ и $\left(a-b\right)^2$

$9x^2+6x+1+16x^2-8x+1=25x^2-20x+4.$
$9x^2+6x+1+16x^2-8x+1-25x^2+20x-4=0.$
приведем подобные члены, получим
$18x-2=0$
$18x=2$ $\qquad x=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$

Ответ: $x=\frac{1}{9}$ – корень уравнения.

$б)\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$ разложим x^2-4 на множители
перенесем все члены уравнения в левую часть и приведем дроби к общему знаменателю

$$\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}-\frac{8}{(x-2)(x+2)}=0$$

$$\frac{x(x+2)-7(x-2)-8}{(x+2)(x-2)}=0$$

$$\frac{x^2+2x-7x+14-8}{(x+2)(x-2)}=0$$

$$\frac{x^2-5x+6}{(x+2)(x-2)}=0$$

дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т. е.

$(x+2)(x-2)\neq 0, \qquad \Rightarrow \qquad x\neq 2;\ x\neq -2$

$x^2-5x+6=0.$

Решаем уравнение

$D=25-24=1$

$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2};$ (корни можно найти по теореме Виета)

$x_1=3; x_2=2$

Так как $x\neq 2$, то $x_2=2$ – посторонний корень и решением уравнения будет $x=3$.

Ответ: $x=3$.

Неравенства с одной переменной.

$ax\geq b;\ ax\leq b;\ ax>b;\ ax<b.\ (a\neq 0)$ – неравенства I степени с одной переменной

$ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0 \quad (a\neq 0)$
$ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0$ – неравенства II степени с одной переменной

Решить неравенство – значит найти множество значений переменной, при которых это неравенство является верным.

Два неравенства называются равносильными, если множество решений этих неравенств совпадают.

Решим неравенства

а) $5x-\frac{7x-1}{2}+\frac{2x-5}{5}>\frac{7}{10}$

Перенесем все члены в левую часть и приведем к общему знаменателю. общий знаменатель 10; так как знаменатель не содержит переменной, то есть сразу видно что он не равен нулю, то в дальнейшем его можно не писать (опустить).

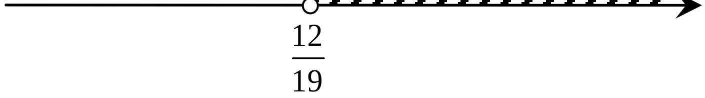
$50x-5(7x-1)+2(2x-5)-7>0$

$50x-35x+5+4x-10-7>0$

$19x-12>0$

$19x>12$

$x>\frac{12}{19}$



$x\in\left(\frac{12}{19};+\infty\right)$

б) $5x-2-3x^2>0$

умножим на (–1)

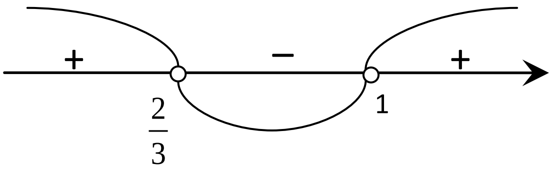
$3x^2-5x+2<0$

квадратное неравенство

Найдем корни уравнения $3x^2-5x+2=0$

$D=25-4\cdot 6=1$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{6}; \quad x_1=1; x_2=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$



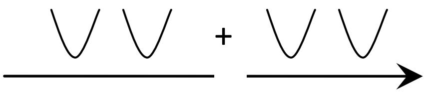
получаем три интервала, в которых определяем знак трехчлена. Так как мы решаем неравенство $3x^2-5x+2<0$, то решением неравенства будет промежуток (интервал) $x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)$

д) $4x-12x^2-3>0$

$12x^2-4x+3<0$

$12x^2-4x+3=0$

$D=16-4\cdot 12\cdot 3<0$



действительных корней нет, так как ветви параболы направлены вверх, то парабола не пересекает ось и расположена выше её, где всегда > 0,

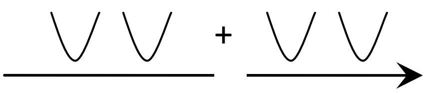
а мы решаем неравенство $12x^2-4x+3<0$, значит данное неравенство не имеет решения.

е) $-2+x-3x^2\le 0$

$3x^2-x+2\ge 0$

$3x^2-x+2=0$

$D=1-4\cdot 6=-23<0$



уравнение не имеет действительных корней, т.е. парабола не пересекает ось, ветви параболы направлены вверх,

а так как мы решаем неравенство $3x^2-x+2\ge 0$, то оно имеет множество решений, т.е. $x\in(-\infty;+\infty)$.

Домашняя работа:

$2\cdot(3x+4)-5\cdot(4x-3)=5x+7$

$3\cdot(4x-2)+2\cdot(2x-1)\ge 4-3x$

$x^2-5x+6\le 0$